Modelos en teoría de redes y grafos dispersos

Escuela de Matemáticas Bourbaki

Junio 2020

Contents

1 Introducción

Estas notas son las notas de mini-curso impartido en la conferencia Aspectos geométricos de la Lógica Matemática y la Ciencia de Datos co-organizada por C. Garay (CIMAT) y D. Fernández Bretón (UNAM). La idea es introducir ideas sencillas de la teoría de redes y su posible relación con los grafos dispersos.

2 Distribución de Pareto

Definition 2.1. Sean $\alpha, \rho > 0$, definimos la ley de probabilidad de Pareto como la ley de probabilidad sobre la línea real tal que:

$$\mathbb{P}_{Par}\left(X > \rho\right) = \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\alpha}, \mathbb{P}_{Par}\left(X > (\rho - \epsilon)\right) = 1$$

La intuición detrás de esta distribución es la siguiente, pensemos en ρ como el porcentaje de la población que acumula la mayor parte de la riqueza en el mundo y la probabilidad de pareto como el porcentaje de la riqueza.

La desventaja de este tipo de distribuciones es que al ser largas las colas, no tenemos prácticamente ningún control sobre lo que pasa ahí, por ejemplo los promedios no funcionan adecuadamente. Algunas distribuciones sí suponen algún tipo de control sobre las colas.

Definition 2.2. Una distriución que sigue una ley de potencias con exponential cut-off de parámetros ρ, ν si

$$\mathbb{P}\left(X > \rho\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{e}\right)^{x \cdot \alpha}$$

Un ejemplo de este tipo de distribución es la distribución $\mathbb{P}\left(x\right)$ del porcentaje de vértices en grafos suficientemente complejos con grado x.

En estas notas estudiaremos características "dispersas" de familias de redes que en numerosos casos se sabe que tienen ley de potencias con exponential cut-off. Conjeturalmente existen muchos redes en el mundo real con esta propiedad.

3 Estructuras pseudo-finitas y modelos aleatorios de grafos

Definition 3.1. Sea L un lenguaje de primer orden, diremos que una L-estructura M es pseudo-finita si para toda oración σ en L, existe una L-estructura finita M_σ tal que $M_\sigma \models \sigma$

Proposition 3.1. *Una L-estructura M es pseudo-finita si y solo si M es elementariamente equivalente a un ultraproducto de estructuras finitas.*

Definition 3.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo numerable, diremos que el G es:

- Universal si para todo grafo finito G' existe una inmersión de G' en G.
- Extendible si para todo par de grafos finitos G', G'', si existen dos inmersiones $G' \to G$, $G' \to G''$, entonces existe una inmersión $G'' \to G$ que conmuta con las anteriores.

Theorem 3.2. *Si G, G' son dos grafos numerables y tanto universales como extendibles, entonces G y G' son isomorfos.*

Theorem 3.3. *(Erdôs-Rényi) Existe un grafo Γ numerable, universal y extendible, a su teoría en el lenguaje de grafos la llamaremos la teoría del grafo aleatorio T_Γ*

Theorem 3.4. *La teoría del grafo aleatorio T_Γ es pseudo-finita.*

Para demostrar este teorema comencemos con definir una familia de oraciones que están todas en T_Γ, de hecho esta familia de oraciones es suficiente para axiomatizar la teoría T_Γ.

Definition 3.3. Consideremos la siguiente familia de oraciones en el lenguaje de grafos $L = (R)$: para cada k, l, $P_{k,l}$ es el conjunto de todas las oraciones

$$\forall x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l \left(\bigwedge_{i \leq k, j \leq k} x_i \neq x_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \leq l, j \leq l} y_i \neq y_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{i \leq k, j \leq l} x_i \neq y_j \right) \wedge \left(\exists z \left(\left(\bigwedge_{i \leq k} x_i R z \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \leq l} y_j R^c z \right) \right) \right)$$

Definition 3.4. Un modelo de grafos es un proceso aleatorio $G(n, \rho)$ donde $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^t$ tal que

- $G(n, \rho(n))$ es una variable aleatoria cuya imagen es la familia de todos los posibles grafos $\{0,1\}^{\{1,\ldots,n^2\}}$
- La ley de probabilidad de $G(n, \rho(n))$ está determinada por los parámetros $\rho(n)$.

Una forma de estudiar propiedades en comun de la teoría de redes es mediante el estudio de las propiedades de los modelos de grafos. Nos interesa conocer aquellas propiedades comunes de algunas familias de redes usuales en el mundo real. El siguiente ejemplo es un modelo cuya ley de probabilidad es un proceso de Poisson. Desafortunadamente muchas redes complejas en el mundo real han demostrado tener un comportamiento distinto a los procesos de Poisson.

Exercise 3.5. *Sea $t = 1$ y $p \in [0,1]$, definimos para todo n, $\rho(n) = p$ y para cada $G = (i_1, \ldots, i_{n^2})$ $\mathbb{P}_{G(n,p)}((i_1, \ldots, i_{n^2})) = p^m (1-p)^{n^2 - m}$ donde m es la cantidad de vértices en G.*

Definition 3.5. Utilizando la misma ρ del ejemplo anterior consideremos los siguientes eventos en $\{0,1\}^{\{1,\ldots,n^2\}}$: $\overline{P_{k,l}} = \{G : G \models P_{k,l}\}$

Theorem 3.6. *Para todo $k, l \in \mathbb{N}$ y $p \in [0,1]$,*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\mathbb{P}_{G(n,p)} \left(\overline{P_{k,l}} \right) \right) = 1$$

Corollary 3.7. *La teoría T_Γ es pseudo-finita.*

4 Grafos dispersos

En esta sección en lugar de estudiar modelos de grafos como procesos aleatorios vamos a describir algunas propiedades en común de familias de grafos, para ello nos concentraremos primero en a qué nos referimos con una familia de grafos de nuestro interés.

Definition 4.1. Una familia de grafos $\mathbf{G}$ es monótona si para todo subgrafo G' de cualquier grafo $G \in \mathbf{G}$, $G' \in \mathbf{G}$.

Definition 4.2.

- Una familia monótona de grafos es densa en ninguna parte si ninguno de sus grafos tiene la propiedad del orden.
- Un grafo tiene la propiedad del orden si para todo k, G tiene la propiedad del k-orden.
- Un grafo no tiene la propiedad del k-orden si no existen subconjuntos A, B disjuntos, tales que el subgrafo inducido en $A \times B$ contiene al grafo diagonal i.e. $a_i R b_j$ si y solo si $i < j$.

Definition 4.3. Sea $\mathbf{G}$ una clase de grafos, definimos $\mathbf{G}(n)$ la familia de grafos con n vértices. Definimos la entropía de $\mathbf{G}$

$$E(\mathbf{G}) = \frac{log(|\mathbf{G}(n)|)}{\binom{n}{2}}$$